Γραμμικη Αλγεβρα II

Προχειρη Δοκιμασια 6

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης- Α. Μπεληγιάννης

Βοηθος Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII.html

23 - 5 - 2012

Άσκηση 1. *Έστω ο Ευκλείδειος χώρος* $(\mathbb{R}^4, \langle , \rangle)$*, όπου* $\langle , \rangle$ *είναι το κανονικό (συνηθισμένο) εσωτερικό γινόμενο.*

Θεωρούμε τον ακόλουθο υπόχωρο $\mathcal{V}$ *του Ευκλείδειου χώρου* $\mathbb{R}^4$*:*

$$\mathcal{V} = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y - z = 0 \quad \text{και} \quad y - z - w = 0\right\}$$

1. *Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του* $\mathcal{V}$.

2. *Να βρεθεί ο ορθογώνιος υπόχωρος* $\mathcal{V}^{\perp}$ *του* $\mathcal{V}$.

Γραμμικη Αλγεβρα II

Προχειρη Δοκιμασια 6

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης- Α. Μπεληγιάννης

Βοηθος Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII.html

23 - 5 - 2012

Άσκηση 1. *Έστω ο Ευκλείδειος χώρος* $(\mathbb{R}^4, \langle , \rangle)$, *όπου* $\langle , \rangle$ *είναι το κανονικό (συνηθισμένο) εσωτερικό γινόμενο.*

Θεωρούμε τον ακόλουθο υπόχωρο $\mathcal{V}$ *του Ευκλείδειου χώρου* $\mathbb{R}^4$*:*

$$\mathcal{V} = \big\{(x, y, z, w) \ \in \ \mathbb{R}^4 \ \mid \ 2x - y - z = 0 \quad \text{και} \quad y - z - w = 0\big\}$$

1. *Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του* $\mathcal{V}$.

2. *Να βρεθεί ο ορθογώνιος υπόχωρος* $\mathcal{V}^{\perp}$ *του* $\mathcal{V}$.

Λύση. *Από τις εξισώσεις* $2x - y - z = 0$ *και* $y - z - w = 0$ *έχουμε ότι* $z = 2x - y$ *και άρα* $w = y - z = y - 2x + y = 2y - 2x$. *Επομένως*

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \big\{(x, y, z, w) \ \in \ \mathbb{R}^4 \ \mid \ 2x - y - z = 0 \quad \text{και} \quad y - z - w = 0\big\} \\ &= \big\{(x, y, z, w) \ \in \ \mathbb{R}^4 \ \mid \ z = 2x - y \quad \text{και} \quad w = 2y - 2x\big\} \\ &= \big\{(x, y, 2x - y, 2y - 2x) \ \in \ \mathbb{R}^4 \ \mid \ x, y \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \langle (1, 0, 2, -2), (0, 1, -1, 2) \rangle \end{aligned}$$

Το σύνολο $\{(1, 0, 2, -2), (0, 1, -1, 2)\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα αποτελεί μια βάση του* $\mathcal{V}$. *Αφού* $\langle (1, 0, 2, -2), (0, 1, -1, 2) \rangle = -6 \neq 0$ *έπεται ότι τα διανύσματα δεν είναι κάθετα μεταξύ τους. Άρα για να βρούμε μια ορθοκανονική βάση του* $\mathcal{V}$ *εφαρμόζουμε την διαδικασία Gram-Schmidt.*

<u>Διαδικασία Gram-Schmidt</u>:

Θέτουμε $\vec{x}_1 = (1, 0, 2, -2)$ *και* $\vec{x}_2 = (0, 1, -1, 2)$. *Τότε* $\vec{y}_1 = \vec{x}_1 = (1, 0, 2, -2)$ *και*

$$\begin{aligned} \vec{y}_2 = \vec{x}_2 - \frac{\langle \vec{x}_2, \vec{y}_1 \rangle}{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle} \cdot \vec{y}_1 &= (0, 1, -1, 2) - \frac{\langle (0, 1, -1, 2), (1, 0, 2, -2) \rangle}{\langle (1, 0, 2, -2), (1, 0, 2, -2) \rangle} \cdot (1, 0, 2, -2) \\ &= (0, 1, -1, 2) - \frac{-6}{9} \cdot (1, 0, 2, -2) \\ &= (0, 1, -1, 2) + (\frac{2}{3}, 0, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}) \\ &= (\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{y}_1$ *και* $\vec{y}_2$*:*

$$\|\vec{y}_1\| = \|(1, 0, 2, -2)\| = \sqrt{\langle (1, 0, 2, -2), (1, 0, 2, -2) \rangle} = \sqrt{9} = 3$$

$$\|\vec{y}_2\| = \|(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})\| = \sqrt{\langle (\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \rangle} = \sqrt{\frac{18}{9}} = \sqrt{2}$$

Τότε η ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}$ είναι

$$\text{OKB}: \quad \{\vec{z}_1, \vec{z}_2\} = \{\vec{z}_1 = \frac{\vec{y}_1}{\|\vec{y}_1\|}, \vec{z}_2 = \frac{\vec{y}_2}{\|\vec{y}_2\|}\} = \{\frac{1}{3}(1,0,2,-2), \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})\}$$

Αφού $\mathbb{R}^4 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^\perp$ *έπεται ότι* $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} + \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}^\perp$ *και άρα* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}^\perp = 2$. *Έχουμε:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}^\perp &= \Big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid \langle(1,0,2,-2),(x,y,z,w)\rangle = 0 \ \textit{ και } \ \langle(0,1,-1,2),(x,y,z,w)\rangle = 0\Big\} \\
&= \Big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2z - 2w = 0 \ \textit{ και } \ y - z + 2w = 0\Big\} \\
&= \Big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x = -2z + 2w \ \textit{ και } \ y = z - 2w\Big\} \\
&= \Big\{(-2z+2w, z-2w, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid z, w \in \mathbb{R}\Big\} \\
&= \Big\{z(-2,1,1,0) + w(2,-2,0,1) \in \mathbb{R}^4 \mid z, w \in \mathbb{R}\Big\} \\
&= \Big\langle(-2,1,1,0),(2,-2,0,1)\Big\rangle
\end{aligned}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το σύνολο $\{(-2,1,1,0),(2,-2,0,1)\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα αποτελεί μια βάση του* $\mathcal{V}^\perp$. $\square$